

UNICITÉ TRAJECTOIRELLE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES AVEC TEMPS LOCAL ET TEMPS DE SÉJOUR AU BORD

R. BELFADLI AND Y. OUKNINE

ABSTRACT. Nous étudions l'unicité trajectorielle des solutions d'une classe d'équations différentielles stochastiques avec temps local et temps de séjour au bord. Nous utilisons le problème des martingales associé pour montrer qu'il y a unicité en loi, puis nous établissons que le supremum de deux solutions est encore une solution.

1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans ce papier à l'étude de l'unicité trajectorielle des solutions d'équations différentielles stochastiques (EDSs) avec temps local et temps de séjour au bord. Plus précisément, on considère sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ les EDSs du type:

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t 1_{\{X_s \neq 0\}} dB_s + \int_0^t \alpha(s) dL_s^0(X) \\ \int_0^t 1_{\{X_s = 0\}} ds = \int_0^t \rho(h_s) dL_s^0(X), \end{cases} \quad (1.1)$$

où dans cette équation B désigne un mouvement brownien linéaire issu de 0, $L_t^0(X)$ est le temps local au point zéro de la semimartingale inconnue X , $\alpha(\cdot)$ est une fonction borélienne positive, $\rho(\cdot)$ est une fonction lipschitzienne strictement positive sur $[0, 1]$ et la fonction inconnue h_t est définie par $h_t := \mathbb{P}_x(X_t = 0)$.

Dans cette équation, il ya en fait deux inconnues: le processus aléatoire à valeurs réelles $(X_t, t \geq 0)$ et la fonction h_t .

Lorsque la fonction $\alpha(\cdot)$ est une constante inférieur à $1/2$, (1.1) se réduit à une EDS introduite par S. Weinryb dans [10]. Elle possède, dans ce cas, une unique solution trajectorielle obtenue comme le "processus non linéaire" associé à un système de particules en interaction dont le temps de séjours de chacune dépend du nombre moyen de particules au bord par l'intermédiaire d'une fonction décroissante ρ (voir, [10] pour plus de détails). Indiquons également qu'on retrouve ces EDSs dans S. Watanabe [8] lors de l'étude de quelques exemples explicites d'EDSs.

Le type d'EDSs (1.1), que nous considérons ici, est légèrement plus général que celui considéré par S. Weinryb dans [10]. Notre objectif est de montrer l'unicité trajectorielle

Date: March 31, 2010.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 60H10; Secondary 60J55.

Key words and phrases. Unicité Trajectorielle; Equation Différentielle Stochastique singulière; Temps Local.

This research is supported by the Hassan II Academy of Sciences and Technology.

des solutions à ces EDSs. Pour cela, nous allons utiliser de façon essentielle une technique introduite par A. Y. Veretennikov [7] et utilisée par E. Perkins [5], J. F. Le Gall [1] et S. Weinryb ([9], [10]), qui consiste à démontrer l'unicité en loi pour ces solutions, et que le supremum de deux solutions est encore une solution.

Nous procédons donc comme suit: Dans la Section 2, on formule le problème des martingales associé au système (1.1), puis on montre l'unicité de la solution à ce problème. Ensuite, dans la Section 3, nous utilisons le temps local pour montrer que le maximum et le minimum de deux solutions sont encore des solutions.

2. FORMULATION DU PROBLÈME MARTINGALE NON LINÉAIRE ASSOCIÉ

Sur l'espace canonique $C(\mathbb{R})$ on s'intéresse aux solutions \mathbb{P}_x du problème de martingale $\mathcal{P}(x)$:

- (i) pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^*) \cap C(\mathbb{R})$ possédant des dérivées à droites et à gauche en 0, bornée ainsi que ses dérivées

$$f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) 1_{\{X_s \neq 0\}} ds - \int_0^t [f'(0^+) \alpha(s) + \frac{f'(0^+) - f'(0^-)}{2}] dL_s^0(X)$$

est une martingale. Ici, $L_t^0(X)$ désigne le temps local au sens de Tanaka de la semimartingale X ;

- (ii) $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ et $\int_0^t 1_{\{X_s = 0\}} ds = \int_0^t \rho(h_s) dL_s^0(X)$.

Unicité faible de la solution \mathbb{P}_x de $\mathcal{P}(x)$:

Nous montrerons tout d'abord que la loi $\mu_t(x, dy) := \mathbb{P}_x(X_t \in dy)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dy sur \mathbb{R}^* .

Lemme 2.1. *Pour tout $t \geq 0$, on a*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \frac{\mu_t(x, A_\epsilon)}{2\epsilon} ds = \int_0^t \frac{1 - \alpha(s)}{\rho(h_s)} h(s) ds, \quad (2.1)$$

où $A_\epsilon :=]-\epsilon, \epsilon[\setminus \{0\}$ et $h(t) := \mathbb{P}_x(X_t = 0)$. En particulier, $\mu_t(x, dy)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^* et sa densité de Radon-Nikodym $p_t(x, y)$ vérifie

$$\frac{p_t(x, 0^+) + p_t(x, 0^-)}{2} = \frac{1 - \alpha(t)}{\rho(h_t)} h(t) \quad (2.2)$$

Démonstration du Lemme 2.1. D'après le point (i), on a pour toute fonction f régulière

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t f''(X_s) 1_{\{X_s \neq 0\}} ds \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s \right)$$

ce qui implique $d\langle X, X \rangle_s = 1_{\{X_s \neq 0\}} ds$, et par conséquent

$$\frac{1}{2}(L_t^0 + L_t^{0-}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t 1_{\{0 \leq |X_s| \leq \epsilon\}} d\langle X, X \rangle_s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t 1_{\{0 < |X_s| \leq \epsilon\}} ds. \quad (2.3)$$

D'autre part,

$$\frac{1}{2}(L_t^0 - L_t^{0-}) = \int_0^t 1_{\{X_s = 0\}} dV_s,$$

où $V_t = \int_0^t \alpha(s) dL_s^0(X)$ désigne la partie à variation finie de la semimartingale X . Ce qui donne $L_t^{0-} = \int_0^t (1 - 2\alpha(s)) dL_s^0$. Et par suite, compte tenu du point (ii), on obtient:

$$\frac{1}{2}(L_t^0 + L_t^{0-}) = \int_0^t (1 - \alpha(s)) dL_s^0 = \int_0^t \frac{1 - \alpha(s)}{\rho(h_s)} 1_{\{X_s=0\}} ds. \quad (2.4)$$

D'où, l'égalité (2.1) s'obtient en prenant l'espérance des seconds membres des deux équations (2.3) et (2.4). ■

Lemme 2.2. *La fonction $h(t) := \mathbb{P}_x(X_t = 0)$ satisfait l'équation intégral-différentielle*

$$\frac{1 - \alpha(t)}{\rho(h_t)} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{h(t-s) - h(t)}{s^{3/2}} ds - \frac{h(t)}{\sqrt{2\pi t}} \quad (2.5)$$

Démonstration du Lemme 2.2. Posons, pour $t \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda, t) = \mathbb{E}_x(e^{i\lambda X_t} 1_{\{X_t \neq 0\}})$$

Par application de la formule d'Itô et en tenant compte que la partie à variation finie V du processus X est donnée par $dV_t = \alpha(t) dL_t^0(X) = \frac{\alpha(t)}{\rho(h_s)} 1_{\{X_t=0\}} dt$, on a:

$$f(\lambda, t) + h(t) = e^{i\lambda x} + i\lambda \mathbb{E}_x \left(\int_0^t e^{i\lambda X_s} \frac{\alpha(s)}{\rho(h_s)} 1_{\{X_s=0\}} ds \right) - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t f(\lambda, s) ds$$

Soit encore,

$$f(\lambda, t) + h(t) = e^{i\lambda x} + \int_0^t \left[\frac{i\lambda}{\rho(h_s)} \alpha(s) + \frac{\lambda^2}{2} \right] h(s) ds - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t (f(\lambda, s) + h(s)) ds$$

En considérant la fonction h comme connue dans cette équation et après résolution, on obtient:

$$\begin{aligned} f(\lambda, t) + h(t) &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \left[e^{i\lambda x} - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t ds e^{\frac{\lambda^2}{2}s} \int_0^s du \left(\frac{i\lambda}{\rho(h_s)} \alpha(u) + \frac{\lambda^2}{2} \right) h(u) \right] \\ &\quad + \int_0^t ds h(s) \left(\frac{i\lambda}{\rho(h_s)} \alpha(s) + \frac{\lambda^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Soit, après une intégration par partie,

$$f(\lambda, t) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \left[e^{i\lambda x} + \int_0^t ds e^{\frac{\lambda^2}{2}s} h(s) \left(\frac{i\lambda}{\rho(h_s)} \alpha(s) + \frac{\lambda^2}{2} \right) \right] - h(t). \quad (2.6)$$

D'autre part, $f(\lambda, t)$ est la transformée de Fourier de la fonction $p_t(x, y)$ et donc il s'ensuit par la formule d'inversion que

$$\frac{p_t(x, 0^+) + p_t(x, 0^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int f(\lambda, t) d\lambda$$

En injectant (2.6) dans cette formule et en tenant compte de (2.2), on obtient (2.5). ■

Proposition 2.3. *Lorsque la fonction $\alpha(t) \leq 1/2$, il ya unicité faible de la solution \mathbb{P}_x de $\mathcal{P}(x)$.*

Preuve de la Proposition 2.3. Observant tout d'abord que, puisque $\alpha(\cdot)$ est bornée et que la fonction $g(t, x) := \frac{1-\alpha(t)}{\rho(x)}x$ définissant le second membre de (2.5) est lipshitzienne en x , l'argument de S. Weinryb [10] s'adapte bien et on a l'unicité de la solution de l'équation intégral-différentielle (2.5). On en déduit alors, de l'expression (2.6), que la fonction $f(\lambda, t)$ est uniquement déterminée. Autrement dit, on a l'unicité de la loi de

X_t sous \mathbb{P}_x pour chaque $t > 0$. Puis on passe à tout le processus en utilisant le caractère markovien de X . ■

3. UNICITÉ TRAJECTORIELLE DES SOLUTIONS DE (1.1)

Theorem 3.1. *Si la fonction $\alpha(t) \leq \frac{1}{2}$, alors il ya unicité trajectorille des solutions de (1.1).*

Preuve du théorème. D'après la première partie, il ya unicité en loi des solutions de (1.1). Il suffit alors de démontrer que le supremum de deux solutions est encore une solution.

Si X^1 et X^2 sont deux solutions de (1.1), associées au même brownien B , alors en écrivant $X_t^1 \vee X_t^2 = (X_t^1 - X_t^2)^+ + X_t^2$ et par application de la formule d'Itô-Tanaka, on a

$$\begin{aligned} d(X^1 \vee X^2)_t &= 1_{\{X_t^1 \vee X_t^2 \neq 0\}} dB_t + \alpha(t) (1_{\{X_t^2 < 0\}} dL_t^0(X^1) + 1_{\{X_t^1 \leq 0\}} dL_t^0(X^2)) \\ &\quad + \frac{1}{2} dL_t^0(\Delta X), \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $L_t^0(\Delta X)$ désigne le temps local de la semimartingale $\Delta X = X^1 - X^2$.

De plus,

$$1_{\{X_t^1 \vee X_t^2 = 0\}} dt = \rho(h_s) (1_{\{X_t^2 < 0\}} dL_t^0(X^1) + 1_{\{X_t^1 \leq 0\}} dL_t^0(X^2)). \quad (3.2)$$

Ce qui montre alors que le supremum $(X_t^1 \vee X_t^2, t \geq 0)$ est également solution de (1.1) grâce au résultat de la Proposition 3.2 ci-dessous et par suite l'unicité trajectorielle pour l'équation (1.1). ■

Proposition 3.2. *Pour tout $t \geq 0$, on a*

$$L_t^0(\Delta X) = 0 \quad \text{et} \quad dL_t^0(X^1 \vee X^2) = 1_{\{X_t^2 < 0\}} dL_t^0(X^1) + 1_{\{X_t^1 \leq 0\}} dL_t^0(X^2). \quad (3.3)$$

Pour la preuve de cette proposition, nous avons besoin de deux lemmes.

Introduisons, pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et $i = 1, 2$, les processus $(Z_t^{\alpha, i} := X^i - 2\alpha X_t^{i+}, t \geq 0)$ et $(\Delta Z_t^\alpha := Z_t^{\alpha, 1} - Z_t^{\alpha, 2}, t \geq 0)$.

Lemme 3.3. (i) *La mesure $dL_t^0(X^1 - X^2)$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue et à support inclu dans l'ensemble $\{t, X_t^1 = X_t^2 = 0\}$;*
(ii) *Il existe une fonction mesurable positive φ telle que, pour tout $t \geq 0$*

$$L_t^0(\Delta Z^\alpha) = \int_0^t (1 - 2\alpha\varphi(s)) dL_s^0(\Delta X) \quad (3.4)$$

(iii) *Si φ est la fonction définie en (ii), alors on a pour tout $t \geq 0$*

$$L_t^0(X^1 \vee X^2) = \int_0^t 1_{\{X_s^1 \leq 0\}} dL_s^0(X^2) + \int_0^t 1_{\{X_s^2 < 0\}} dL_s^0(X^1) + \int_0^t \varphi(s) dL_s^0(\Delta X) \quad (3.5)$$

Remarque 3.4. *De l'expression (3.5), on en déduit que*

$$\int_0^t \varphi(s) dL_s^0(\Delta X) = \frac{1}{2\alpha} [L_t^0(\Delta X) - L_t^0(\Delta Z^\alpha)]$$

est indépendant de α .

Preuve du Lemme 3.3. (i) L'absolu continuité résulte de l'estimation

$$L_t^0(\Delta X) \leq \int_0^t (1_{\{X_s^1=0\}} + 1_{\{X_s^2=0\}}) \frac{ds}{\rho(h_s)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Cette inégalité est une conséquence immédiate de $L_t^0(\Delta X) \leq L_t^0(X^1) + L_t^0(X^2)$ et du fait que X^1 et X^2 sont solutions de (1.1). Pour montrer que le support de $dL_t^0(\Delta X)$ est inclu dans $\{t, X_t^1 = X_t^2 = 0\}$, il suffit de remarquer que $\int_0^t |X_s^1| dL_s^0(\Delta X) = 0$.

(ii) Par application du lemme 1 de [2], on a $L_t^0(\Delta Z^\alpha) \leq L_t^0(\Delta X)$. Il en résulte que $dL_t^0(\Delta Z^\alpha)$ est absolument continue par rapport à $dL_t^0(\Delta X)$ et par suite on a la représentation (3.4).

(iii) D'après [6] (voir aussi [4]), on sait que

$$L_t^0(X^1 \vee X^2) = \int_0^t 1_{\{X_s^1 \leq 0\}} dL_s^0(X^2) + L_t^0(X^{1+} - X^{2+})$$

il suffit donc de montrer que

$$L_t^0(X^{1+} - X^{2+}) = \int_0^t 1_{\{X_s^2 < 0\}} dL_s^0(X^1) + \int_0^t \varphi(s) dL_s^0(\Delta X)$$

où encore, compte tenu de (3.4), que

$$L_t^0(X^{1+} - X^{2+}) = \int_0^t 1_{\{X_s^2 < 0\}} dL_s^0(X^1) + \frac{1}{2\alpha} [L_t^0(\Delta X) - L_t^0(\Delta Z^\alpha)]. \quad (3.6)$$

En utilisant l'égalité

$$2\alpha(X_t^{1+} - X_t^{2+})^+ = (\Delta X_t)^+ - (\Delta Z_t^\alpha)^+$$

on a, d'une part, par la formule d'Itô-Tanaka

$$2\alpha d(X_t^{1+} - X_t^{2+})^+ = 2\alpha 1_{\{X_t^{1+} > X_t^{2+}\}} d(X_t^{1+} - X_t^{2+}) + \alpha dL_t^0(X_t^{1+} - X_t^{2+}) \quad (3.7)$$

et d'autre part,

$$2\alpha d(X_t^{1+} - X_t^{2+})^+ = 1_{\{\Delta X_t > 0\}} d(\Delta X_t) - 1_{\{\Delta Z_t^\alpha > 0\}} d(\Delta Z_t^\alpha) + \frac{1}{2} d(L_t^0(\Delta X) - L_t^0(\Delta Z^\alpha))$$

or $\Delta X_t \Delta Z_t^\alpha \geq 0$, il vient

$$2\alpha d(X_t^{1+} - X_t^{2+})^+ = 2\alpha 1_{\{\Delta X_t > 0\}} d(X_t^{1+} - X_t^{2+}) + \frac{1}{2} d(L_t^0(\Delta X) - L_t^0(\Delta Z^\alpha)). \quad (3.8)$$

Ce qui conduit, par (3.7), à

$$\begin{aligned} dL_t^0(X_t^{1+} - X_t^{2+}) &= 2 \left(1_{\{X_t^1 > X_t^2\}} - 1_{\{X_t^{1+} > X_t^{2+}\}} \right) d(X_t^{1+} - X_t^{2+}) \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} d(L_t^0(\Delta X) - L_t^0(\Delta Z^\alpha)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Par ailleurs, en appliquant la formule d'Itô-Tanaka, on montre aisément que

$$2 \left(1_{\{X_t^1 > X_t^2\}} - 1_{\{X_t^{1+} > X_t^{2+}\}} \right) d(X_t^{1+} - X_t^{2+}) = 1_{\{X_t^2 < 0\}} dL_t^0(X^1) \quad (3.10)$$

et donc (3.6) s'obtient en reportant (3.10) dans (3.9). Ceci complète la preuve du Lemme 3.3. ■

Lemme 3.5. (i) Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\int_0^t \varphi(s) dL_s^0(\Delta X) = 0 \quad (3.11)$$

(ii) Posons: $h_{1,2}(t) = \mathbb{P}_x(X_t^1 \vee X_t^2 = 0)$ et $\bar{h}_{1,2}(t) = \mathbb{P}_x(X_t^1 \wedge X_t^2 = 0)$. Alors $h_{1,2}$ et $\bar{h}_{1,2}$ satisfont aux équations suivantes:

$$\frac{1 - \alpha(t)}{\rho(h_t)} h_{1,2}(t) + \mathbb{E}\psi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{h_{1,2}(t-s) - h_{1,2}(t)}{s^{3/2}} ds - \frac{h_{1,2}(t)}{\sqrt{2\pi t}} \quad (3.12)$$

$$\frac{1 - \alpha(t)}{\rho(h_t)} \bar{h}_{1,2}(t) + \mathbb{E}\psi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\bar{h}_{1,2}(t-s) - \bar{h}_{1,2}(t)}{s^{3/2}} ds - \frac{\bar{h}_{1,2}(t)}{\sqrt{2\pi t}} \quad (3.13)$$

Ici, la fonction ψ est définie par $\psi(t) = -\frac{1}{2}L_t^0(\Delta X)$ et ψ' désigne sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue.

Preuve du Lemme 3.5. (i) Puisque

$$d\langle \Delta Z^\alpha, \Delta Z^\alpha \rangle_t = [\mathbf{1}_{\{X_t^1 \neq 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_t^2 \neq 0\}} - 2\alpha(\mathbf{1}_{\{X_t^1 > 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_t^2 > 0\}})]^2 dt$$

on a

$$L_t^0(\Delta Z^\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{0 \leq \Delta X_s - 2\alpha \Delta Z_s^\alpha \leq \epsilon\}} [\mathbf{1}_{\{X_s^1 \neq 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_s^2 \neq 0\}} - 2\alpha(\mathbf{1}_{\{X_s^1 > 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_s^2 > 0\}})]^2 ds$$

En développant le carré, il vient

$$L_t^0(\Delta Z^\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [I_\epsilon^1(t) + I_\epsilon^2(t) + I_\epsilon^3(t)], \quad (3.14)$$

où

$$I_\epsilon^1(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{0 \leq \Delta X_s - 2\alpha \Delta Z_s^\alpha \leq \epsilon\}} [\mathbf{1}_{\{X_s^2 = 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_s^1 = 0\}}]^2 ds;$$

$$I_\epsilon^2(t) = 4\alpha^2 \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{0 \leq \Delta X_s - 2\alpha \Delta Z_s^\alpha \leq \epsilon\}} [\mathbf{1}_{\{X_s^1 > 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_s^2 > 0\}}]^2 ds;$$

et

$$I_\epsilon^3(t) = -4\alpha \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{0 \leq \Delta X_s - 2\alpha \Delta Z_s^\alpha \leq \epsilon\}} (\mathbf{1}_{\{X_s^1 \neq 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_s^2 \neq 0\}})(\mathbf{1}_{\{X_s^1 > 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_s^2 > 0\}}) ds.$$

Un calcul élémentaire nous donne

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon^1(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int_0^t (\mathbf{1}_{\{X_s^2 = 0, 0 < (1-2\alpha)X_s^1 \leq \epsilon\}} + \mathbf{1}_{\{X_s^1 = 0, -\epsilon \leq X_s^2 < 0\}}) ds \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-2\alpha} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^2 = 0, 0 < X_s^1 \leq \epsilon\}} ds + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^1 = 0, -\epsilon \leq X_s^2 < 0\}} ds \right] \\ &= \frac{2\alpha}{1-2\alpha} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^2 = 0, 0 < X_s^1 \leq \epsilon\}} ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t (\mathbf{1}_{\{X_s^2 = 0, 0 < X_s^1 \leq \epsilon\}} + \mathbf{1}_{\{X_s^1 = 0, -\epsilon \leq X_s^2 < 0\}}) ds \\ &= \frac{2\alpha}{1-2\alpha} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^2 = 0, 0 < X_s^1 \leq \epsilon\}} ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{0 \leq \Delta X_s \leq \epsilon\}} [\mathbf{1}_{\{X_s^1 \neq 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_s^2 \neq 0\}}]^2 ds \end{aligned}$$

et comme $d\langle \Delta X, \Delta X \rangle_t = [\mathbf{1}_{\{X_t^1 \neq 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_t^2 \neq 0\}}]^2 dt$, on en déduit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon^1(t) = \frac{2\alpha}{1-2\alpha} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t 1_{\{X_s^2=0, 0 < X_s^1 \leq \epsilon\}} ds + L_t^0(\Delta X). \quad (3.15)$$

De même

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon^2(t) = 4\alpha^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t 1_{\{0 \leq (1-2\alpha)X_s^1 - X_s^2 \leq \epsilon, X_s^1 > 0, X_s^2 \leq 0\}} ds \quad (3.16)$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon^3(t) = -4\alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t 1_{\{0 < (1-2\alpha)X_s^1 \leq \epsilon, X_s^2 = 0\}} ds \quad (3.17)$$

D'où, en combinant (3.14), (3.15), (3.16) et (3.17), on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi(s) dL_s^0(\Delta X) &= \frac{1}{2\alpha} [L_t^0(\Delta X) - L_t^0(\Delta Z^\alpha)] \\ &= \frac{-1}{1-2\alpha} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^t 1_{\{X_s^2=0, 0 < X_s^1 \leq \epsilon\}} ds \right) \\ &\quad - 2\alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^t 1_{\{0 \leq (1-2\alpha)X_s^1 - X_s^2 \leq \epsilon, X_s^1 > 0, X_s^2 \leq 0\}} ds \right) \\ &\quad + 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^t 1_{\{0 < X_s^1, 0 < (1-2\alpha)X_s^1 \leq \epsilon, X_s^2 = 0\}} ds \right) \end{aligned}$$

ce qui fournit, en faisant tendre α vers zero

$$\int_0^t \varphi(s) dL_s^0(\Delta X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t 1_{\{X_s^2=0, 0 < X_s^1 \leq \epsilon\}} ds$$

par ailleurs, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t 1_{\{X_s^2=0, 0 < X_s^1 \leq \epsilon\}} ds = (1-2\alpha) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t 1_{\{0 < X_s^1, X_s^2=0, 0 \leq (1-2\alpha)X_s^1 \leq \epsilon\}} ds,$$

qui tend vers zero quand $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$. D'où

$$\int_0^t \varphi(s) dL_s^0(\Delta X) = 0.$$

(ii) Pour déterminer l'équation satisfaite par $h_{1,2}$, nous allons réutiliser les calculs entrepris pour l'équation (2.5), mais cette fois pour le processus $X^1 \vee X^2$. En effet, on a d'une part,

$$\begin{aligned} L_t^0(X^1 \vee X^2) &= \int_0^t 1_{\{X_s^1 \leq 0\}} dL_s^0(X^2) + \int_0^t 1_{\{X_s^2 < 0\}} dL_s^0(X^1) \\ &= \int_0^t 1_{\{X_s^1 \vee X_s^2 = 0\}} \frac{ds}{\rho(h_s)}. \end{aligned}$$

et en utilisant le point (i) du lemme 3.3, on a

$$\begin{aligned}
\frac{L_t^0(X^1 \vee X^2) - L_t^{0-}(X^1 \vee X^2)}{2} &= \int_0^t 1_{\{X_s^1 \vee X_s^2 = 0\}} \alpha(s) \left[1_{\{X_s^1 \leq 0\}} dL_s^0(X^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} 1_{\{X_s^2 < 0\}} dL_s^0(X^1) \right] + \frac{1}{2} \int_0^t 1_{\{X_s^1 \vee X_s^2 = 0\}} dL_s^0(\Delta X) \\
&= \int_0^t \alpha(s) (1_{\{X_s^1 \leq 0\}} dL_s^0(X^2) + 1_{\{X_s^2 < 0\}} dL_s^0(X^1)) \\
&\quad + \frac{1}{2} L_t^0(\Delta X)
\end{aligned}$$

D'où, en tenant compte que X^1 et X^2 sont solutions de (1.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{L_t^0(X^1 \vee X^2) + L_t^{0-}(X^1 \vee X^2)}{2} &= L_t^0(X^1 \vee X^2) - \frac{L_t^0(X^1 \vee X^2) - L_t^{0-}(X^1 \vee X^2)}{2} \\
&= \int_0^t \frac{1 - \alpha(s)}{\rho(h_s)} 1_{\{X_s^1 \vee X_s^2 = 0\}} ds - \frac{1}{2} L_t^0(\Delta X). \quad (3.18)
\end{aligned}$$

D'autre part, on montre facilement, comme dans la première partie, que la loi $\mathbb{P}_x(X_t^1 \vee X_t^2 \in dy)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^* et que sa densité $\bar{p}_t(x, y)$ vérifie

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{p}_t(x, 0^+) + \bar{p}_t(x, 0^-)}{2} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbb{E}_x [L_t^0(X^1 \vee X^2) + L_t^{0-}(X^1 \vee X^2)] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \bar{f}(\lambda, t) d\lambda,
\end{aligned}$$

où $\bar{f}(\lambda, t) = \mathbb{E}_x(e^{i\lambda X_t^1 \vee X_t^2} 1_{\{X_t^1 \vee X_t^2 \neq 0\}})$. Et donc par (3.18), on obtient

$$\frac{1 - \alpha(t)}{\rho(h_t)} h_{1,2}(t) + \mathbb{E}_x \psi'(t) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{f}(\lambda, t) d\lambda \quad (3.19)$$

Par ailleurs, grâce à (3.1), (3.2) et à la formule d'Itô on obtient

$$\begin{aligned}
\bar{f}(\lambda, t) + h_{1,2}(t) &= e^{i\lambda x} - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t (\bar{f}(\lambda, s) + h_{1,2}(s)) ds + \int_0^t \left[\frac{i\lambda}{\rho(h_s)} \alpha(s) + \frac{\lambda^2}{2} \right] h_{1,2}(s) ds \\
&\quad + \frac{i\lambda}{2} \mathbb{E}_x [L_t^0(\Delta X)]
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\bar{f}(\lambda, t) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} [e^{i\lambda x} + \bar{u}(t)] - h_{1,2}(t), \quad (3.20)$$

avec

$$\bar{u}(t) = \int_0^t ds e^{\frac{\lambda^2}{2}s} \left[\frac{i\lambda}{\rho(h_s)} \alpha(s) h_{1,2}(s) + \frac{\lambda^2}{2} h_{1,2}(s) - i\lambda \psi'(s) \right].$$

Et par suite, en utilisant le théorème de Fubini et le fait que la fonction

$$\lambda \mapsto \frac{i\lambda}{\rho(h_{t-s})} e^{\frac{\lambda^2}{2}s} \alpha(t-s) h_{1,2}(t-s) - i\lambda \psi'(s)$$

est impaire, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int \bar{f}(\lambda, t) d\lambda &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1}{2\pi} \int d\lambda \left[\int_0^t ds e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \left(\frac{i\lambda}{\rho(h_s)} \alpha(s) h_{1,2}(s) + \frac{\lambda^2}{2} h_{1,2}(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i\lambda \psi'(s) \right) - h_{1,2}(t) \right] \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1}{2\pi} \int d\lambda \left[\int_0^t ds e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \frac{\lambda^2}{2} h_{1,2}(s) - h_{1,2}(t) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{h_{1,2}(t-s) - h_{1,2}(t)}{s^{3/2}} ds - \frac{h_{1,2}(t)}{\sqrt{2\pi t}},
\end{aligned}$$

ce qui joint à (3.19) prouve (3.12).

Cherchons maintenant l'équation satisfaite par $\bar{h}_{1,2}$. Pour cela, écrivons $\bar{h}_{1,2}(t) = \mathbb{P}_x(Y_t^1 \vee Y_t^2 = 0)$, avec $Y^i = -X^i$, et observons que puisque

$$L_t^0(X^i) = L_t^{0-}(-X^i) \quad \text{et} \quad L_t^0(-X^i) - L_t^{0-}(-X^i) = 2 \int_0^t \alpha(s) dL_s^0(X^i)$$

alors

$$dL_t^0(X^i) = \frac{1}{1 - 2\alpha(s)} dL_t^0(Y^i)$$

ce qui implique que les Y^i , $i = 1, 2$, satisfont aux équations

$$\begin{cases} dY_t^i = 1_{\{Y_t^i \neq 0\}} d\beta_t + \tilde{\alpha}(t) dL_t^0(Y^i) \\ \int_0^t 1_{\{Y_s^i = 0\}} ds = \int_0^t \varrho(s) dL_s^0(Y^i), \end{cases} \quad (3.21)$$

avec $\tilde{\alpha}(t) = -\frac{\alpha(t)}{1-2\alpha(t)}$, $\varrho(t) = \frac{\rho(h_t)}{1-2\alpha(t)}$ et $\beta = -B$. Pour conclure à la démonstrations, il suffit alors de remarquer que

$$\begin{aligned}
\frac{L_t^0(Y^1 \vee Y^2) + L_t^{0-}(Y^1 \vee Y^2)}{2} &= \int_0^t \frac{1 - \tilde{\alpha}(s)}{\varrho(s)} 1_{\{Y_s^1 \vee Y_s^2 = 0\}} ds - \frac{1}{2} L_t^0(X^2 - X^1) \\
&= \int_0^t \frac{1 - \alpha(s)}{\rho(h_s)} 1_{\{Y_s^1 \vee Y_s^2 = 0\}} ds - \frac{1}{2} L_t^0(X^2 - X^1).
\end{aligned}$$

et que $L_t^0(X^2 - X^1) = L_t^{0-}(\Delta X) = L_t^0(\Delta X)$ puisque la partie à variation finie de $X^1 - X^2$ ne charge pas l'ensemble $\{t, X_t^1 = X_t^2\}$.

■

Preuve de la Proposition 3.2. L'expression du temps local $L_t^0(X^1 \vee X^2)$ résulte directement de (3.5) et (3.11). Montrons maintenant que $L_t^0(\Delta X) = 0$.

Observons que, pour tout $t \geq 0$,

$$2h(t) = h_{1,2}(t) + \bar{h}_{1,2}(t).$$

On en déduit alors, en combinant (3.12) et (3.13), que h est solution de

$$\frac{1 - \alpha(t)}{\rho(h_t)} h(t) + \mathbb{E}\psi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{h(t-s) - h(t)}{s^{3/2}} ds - \frac{h(t)}{\sqrt{2\pi t}} \quad (3.22)$$

ce qui entraîne, grâce à (2.5), que

$$0 = \mathbb{E}\psi'(t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbb{E}L_t^0(\Delta X)$$

et donc, $L_t^0(\Delta X) = 0$. Ce qui achève la démonstration. ■

REFERENCES

- [1] J. F. Le Gall, Application du temps local aux equations differentielles stochastiques unidimensionnelles. Séminaire de probabilités de Strasbourg, Vol. 17 (1983), pp. 15-31.
- [2] Y. Ouknine, Généralisation d'un Lemme de S. Nakao et Applications. Stochastics, Vol. 23 (1988), pp. 149-157
- [3] Y. Ouknine, Temps Local du Produit et du Sup de deux semimartingales. Séminaire de probabilités de Strasbourg, Vol. 24 (1989), pp. 477-479.
- [4] Y. Ouknine and M. Rutkowski, Local times of functions of continuous Semimartingales. Stochastic Anal. Appl. 13 (1995), no. 2, pp. 211-231.
- [5] E. Perkins, Local time and pathwise uniqueness for stochastic differential equations. Séminaire de probabilités XVI, Lecture notes in Maths. 920 (1982) pp. 201-208, Springer Verlag, Berlin .
- [6] D. Revuz and M. Yor, Continous Martingales and Brownian Motion. *Springer Edition* (2005).
- [7] A. Y. Veretennikov, On the strong solutions of stochastic differential equations. Theory of probability and its applications, 29 (1979) pp. 354-366.
- [8] S. Watanabe, Theory of Stochastic Differential Equations -An Overview and Examples-
- [9] S. Weinryb, Etude d'une équation différentielle stochastique avec temps local. In Séminaire de Probabilités XVII. Lecture Notes in Math., Vol 986. Springer-Verlag, (1982) 72-77.
- [10] S. Weinryb, Etude d'une Equation Différentielle Stochastique Non Linéaire avec Temps Local, Modèle Limité d'un Système de Particules avec Interaction à la Frontière. Applied Mathematics and Optimization 20 (1989), pp.237-260.

(R. Belfadli and Y. Ouknine) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCES SEMLALIA, CADI AYYAD UNIVERSITY, B.P. 2390 MARRAKESH, MOROCCO.

E-mail address, R. Belfadli: `r.belfadli@ucam.ac.ma`

(Y. Ouknine) HASSAN II ACADEMY OF SCIENCES AND TECHNOLOGY.

E-mail address, Y. Ouknine: `ouknine@ucam.ac.ma`